MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Bei der zu betrachtenden Differentialgleichung

$$y' = x\,e^x\,y \qquad (*_0)$$

handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit der stetigen Funktion

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = x\,e^x.$$

Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int a(x)\,dx &= \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)}\,dx = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}\,dx \\ &= x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C,\end{aligned}$$

so daß etwa

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = (x-1)\,e^x,$$

eine Stammfunktion von a ist; folglich ist

$$\varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{(x-1)e^x}, \quad x \in \mathbb{R},,$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung von $(*_0)$. Wir haben nun diejenigen $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Lösungsfunktion φ_c den Wertebereich $\varphi_c(\mathbb{R}) = [1, \infty[$ besitzt; wegen

$$\varphi_c(x) = c \cdot \underbrace{e^{(x-1)e^x}}_{>0} \begin{cases} > 0, & \text{für } c > 0, \\ = 0, & \text{für } c = 0, \\ < 0, & \text{für } c < 0, \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ kommen hierfür lediglich positive Werte $c > 0$ in Frage. Damit ist

$$\varphi_c'(x) = a(x) \cdot \varphi_c(x) = x \cdot \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{c\,e^{(x-1)e^x}}_{>0} \begin{cases} \leq 0, & \text{für alle } x \leq 0, \\ \geq 0, & \text{für alle } x \geq 0, \end{cases}$$

so daß φ_c auf $]-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0, \infty[$ monoton wachsend ist; für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich demnach

$$\varphi_c(x) \geq \varphi_c(0) = c\,e^{(0-1)e^0} = c\,e^{-1}$$

und folglich zunächst $\varphi_c(\mathbb{R}) \subset \big[c\,e^{-1}, \infty\big[$. Für „$\supset$“ sei $y \in \big[c\,e^{-1}, \infty\big[$; es ist $\varphi_c(0) = c\,e^{-1} \leq y$, und wegen

$$\varphi_c(x) = \underbrace{c}_{>0} \cdot \exp\big(\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to+\infty}}_{\to\infty}\big) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

gibt es ein $b > 0$ mit $y \le \varphi_c(b)$, so daß für die stetige Funktion $\varphi_c|_{[0,b]}$ nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, b]$ mit $\varphi_c(\xi) = y$ existiert, es ist also $y \in \varphi_c(\mathbb{R})$. Zusammenfassend ist

$$\varphi_c(\mathbb{R}) = \big[c\,e^{-1}, \infty\big[\quad \text{mit} \quad \varphi_c(\mathbb{R}) = [1, \infty[\iff c\,e^{-1} = 1 \iff c = e;$$

damit ist

$$\varphi_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_e(x) = e \cdot e^{(x-1)e^x} = e^{1+(x-1)e^x},$$

die gesuchte Lösungsfunktion von $(*_0)$.

2. Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot y + \alpha'(x). \qquad (*)$$

Dabei handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = a(x)y+b(x)$ mit den stetigen Funktionen

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \qquad \text{und} \qquad b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = \alpha'(x).$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL $(*_0)$,
wobei

$$y' = \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot y. \qquad (*_0).$$

Da

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A(x) = \ln|\alpha(x)| \;=\; \ln(\alpha(x)),$$

eine Stammfunktion von a ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c\,e^{A(x)} = c\,e^{\ln(\alpha(x))} = c\,\alpha(x),$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig, die allgemeine Lösung von $(*_0)$ dar.

Partikuläre Lösung φ_p von $(*)$:

Eine partikuläre Lösung $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $(*)$ bekommen wir durch den Ansatz $\varphi_p(x) = u(x) \cdot e^{A(x)}$. Dabei ist u eine Stammfunktion zu

$$h(x) = b(x)e^{-A(x)} \;=\; \alpha'(x)e^{-\ln(\alpha(x))} \;=\; \frac{\alpha'(x)}{e^{\ln(\alpha(x))}} \;=\; \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

also (z.B.)

$$u(x) = \ln(\alpha(x)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist also $\varphi_p(x) = u(x) \cdot e^{A(x)} = \ln(\alpha(x)) \cdot \alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:

Nach 2.4 ist dann

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_p(x) = c\alpha(x) + \ln(\alpha(x)) \cdot \alpha(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig, die allgemeine Lösung von $(*)$.

Lösung des AWP:

Wir bestimmen die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, daß $\varphi(0) = 1$ gilt; wegen

$$\varphi(0) = 1 \iff 1 = c\alpha(0) + \ln(\alpha(0)) \cdot \alpha(0) \overset{\alpha(0)=1}{=} c + \ln(1) \cdot 1 \iff c = 1$$

ist

$$\varphi(x) = \alpha(x) + \ln(\alpha(x)) \cdot \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

die (maximale) Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

3. Bei

$$y' = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y}$$

handelt es sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = e^{-y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist die Bedingung i) aus 2.8 erfüllt und es gibt nach 2.8 für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Wir trennen die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^x \cdot e^{-y} \\ \int e^y \, dy &= \int e^x \, dx \\ e^y &= e^x + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\ y &= \ln(e^x + c) \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \ln(e^x + c) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

wobei

$$D_\varphi = \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ für } c \geq 0 \\ ]\ln(-c), \infty[& , \text{ für } c < 0. \end{cases}$$

4. Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = -(1 + 2\,x), \quad \text{und} \quad g : \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{1 + 2\,y}.$$

Wegen $g(y) \neq 0$ für alle $y > -\frac{1}{2}$ ist die Bedingung i) aus 2.8 erfüllt und es gibt zum Punkt $(0, 0) \in B$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$. Wir trennen die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = -\frac{1 + 2x}{1 + 2y} \\ \int (1 + 2y) \, dy &= \int -(1 + 2x) \, dx \\ y + y^2 &= -(x + x^2) + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \; . \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen gleich die Anfangsbedingung $y(0)=0$: Wegen

$$y(0)=0 \iff 0+0^2=-\left(0+0^2\right)+c \iff 0=-0+c \iff c=0$$

erhält man damit weiter

$$\begin{aligned}
y+y^2 &= -(x+x^2) \\
y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} &= -(x+x^2) \qquad \text{(quadratische Ergänzung)} \\
\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}-(x+x^2) \\
y+\frac{1}{2} &= +\sqrt{\frac{1}{4}-(x+x^2)} \qquad (\text{“+“ wegen } \ y+\frac{1}{2}>0) \\
y &= -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-(x+x^2)}.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun das maximale Definitionsintervall: Nachdem die Wurzelfunktion zwar auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, enthält das maximale Lösungsintervall alle $x\in\mathbb{R}$, für die der Radikand positiv ist; alternativ kann man auch so begründen: weil $y+\frac{1}{2}>0$ muß auch $\sqrt{\frac{1}{4}-(x+x^2)}>0$, also $\frac{1}{4}-\left(x+x^2\right)>0$ gelten. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}-\left(x+x^2\right)>0 &\iff \frac{1}{4}>x+x^2 \iff \frac{1}{2}>\frac{1}{4}+x+x^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 \\
&\iff -\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{2}+x<\frac{1}{\sqrt{2}} \iff -\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ist also

$$\varphi: D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(x)=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-(x+x^2)},$$

mit $D_\varphi=\left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[$ die maximale Lösung des gestellten Anfangswertproblems.